Cours

MAT-5150-2

Optimisation en contexte général

Mathématique

PRÉSENTATION DU COURS

Le but du cours *Optimisation en contexte général* est de rendre l'adulte apte à traiter des situations qui requièrent l'optimisation à l'aide de graphes, d'une programmation linéaire ou d'une recherche de mesures dans un contexte de conception ou d'utilisation d'objets tridimensionnels dans une perspective générale.

L'adulte qui suit le cours est initié à la programmation linéaire et invité à utiliser ses connaissances arithmétiques et algébriques dans le but de résoudre des situations-problèmes qui comportent des contraintes déterminées. Il réinvestit ses habiletés à transposer une situation à l'aide d'équations ou d'inéquations et à manipuler des expressions algébriques. Il représente le système associé dans le plan cartésien en recourant à l'interprétation des relations d'inéquation. Dans le cas de situations à optimiser, il détermine les valeurs des variables de décision dans la fonction qui optimise (minimise ou maximise) une situation soumise à un ensemble de contraintes. Ces contraintes représentent en fait des limites liées à des situations de vie réelles dans des contextes d'optimisation.

Par ailleurs, l'adulte apprend à modéliser des situations-problèmes d'optimisation à l'aide des graphes. Ces situations peuvent être en relation avec la planification de projets, des réseaux de communication ou de distribution, des circuits, des incompatibilités, des localisations, des stratégies, etc. La situation dicte à l'adulte le type de graphe à utiliser : arbre, graphe orienté ou non, coloré ou non, valué ou non. Pour optimiser certaines situations, l'adulte fait appel au chemin critique, à la coloration d'un graphe, aux arbres de valeurs minimales ou à la recherche de la chaîne la plus courte. De plus, il peut représenter ou construire, à l'aide de graphes, des labyrinthes ou des jeux où les acteurs visent une stratégie gagnante. Dans ce dernier cas, une analyse à rebours, fondée sur une représentation du résultat final du jeu à l'aide d'un graphe, permet de déterminer les positions susceptibles de conduire à la victoire.

Le cours permet également d'explorer des situations-problèmes qui nécessitent la recherche de certaines mesures en lien avec les figures isométriques, semblables ou équivalentes ainsi que des propriétés des figures et des relations métriques ou trigonométriques. L'adulte compare des figures équivalentes et détermine celle qui convient le mieux pour respecter certaines conditions (ex. : maximiser ou minimiser l'espace). Il analyse et interprète des situations faisant appel à des instruments de mesure, à la photographie, aux lampes et aux ombres, etc. Par exemple, dans des situations d'emballage, il évalue la forme la plus économique d'un contenant pour un volume donné, en tenant compte de conditions telles que la facilité de rangement. Il peut calculer le rapport entre le volume et l'aire totale et observer un lien entre la valeur du rapport et la forme la plus économique.

Au terme de ce cours, l'adulte sera en mesure de représenter des situations concrètes à l'aide de demi-plans, de graphes valués et orientés ou de figures semblables, isométriques ou équivalentes. Sa production sera juste et claire; elle sera effectuée dans le respect des règles et des conventions mathématiques. L'optimisation d'une situation à l'aide de systèmes d'inéquations du premier degré, de fonctions d'inférence (graphe) ou encore de calculs impliquant des données géométriques lui permettra de prendre des décisions. De plus, il utilisera différents registres de représentation afin de généraliser le comportement à un ensemble de situations.

COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

Pour résoudre des situations-problèmes proposées dans ce cours, l'adulte a recours aux trois compétences disciplinaires, soit :

- *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes*;
- *Déployer un raisonnement mathématique*;
- *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

L'emploi de stratégies efficaces incite l'adulte à déployer un raisonnement mathématique rigoureux et à communiquer avec clarté à l'aide du langage mathématique, en démontrant qu'il en respecte les codes et les conventions particulières. C'est donc par l'activation intégrée des trois compétences disciplinaires et à l'aide d'autres ressources que l'adulte parvient à résoudre des situations-problèmes.

La rubrique *Démarche et stratégies* explique comment faire évoluer une situation-problème vers une solution par la mise à contribution des trois compétences disciplinaires.

DÉMARCHE ET STRATÉGIES

L'adulte a besoin, pour le guider vers la résolution d'un problème, de stratégies efficaces qu'il adapte aux situations présentées.

Il traite des situations-problèmes en utilisant une démarche qui comprend quatre phases de résolution :

- **la représentation**;
- **la planification**;
- **l'activation**;
- **la réflexion**.

Le tableau qui suit présente sommairement chacune des phases de la démarche de résolution et quelques exemples de stratégies que l'adulte peut employer pour traiter les situations. Ces phases ne se présentent pas nécessairement de façon successive. De nombreux allers-retours entre les quatre phases peuvent être nécessaires lors de la résolution d'une situation-problème.

<table>
<tr><th colspan="2">DÉMARCHE ET STRATÉGIES</th></tr>
<tr><th colspan="2">LA REPRÉSENTATION</th></tr>
<tr><td colspan="2">- L’adulte prend connaissance de la situation-problème afin de bien cerner le contexte, le problème et la tâche à effectuer. Il utilise des stratégies d’observation et de représentation essentielles au raisonnement inductif.
- L’appropriation du contexte et du problème l’amène à déployer des raisonnements déductifs.
- L’étape de la représentation de situations liées à l’optimisation géométrique donne lieu à certaines constatations (ex. : le prisme droit de plus grand volume est le cube).</td></tr>
<tr><td>Exemples de stratégies</td><td>• se questionner dans le but de déterminer, à partir de l’énoncé, quel type d’optimisation est approprié;
• schématiser intuitivement, à l’aide de sommets et d’arêtes, un graphe représentant le problème;
• faire la liste des savoirs mathématiques en matière de théorie des graphes, dans le cas d’un problème lié à la recherche du chemin optimal;
• décrire les caractéristiques de la situation;
• recueillir les informations pertinentes (sommets, arêtes, cycle, etc.);
• déterminer, à partir d’un devis, d’un plan à l’échelle ou encore de descriptions littérales la nature de la tâche à réaliser (consignes, résultats attendus, but, temps disponible, etc.);
• écrire littéralement les éléments de la situation qui lui semblent pertinents, ce qui facilite la recherche de mesures ou la représentation spatiale.</td></tr>
<tr><th colspan="2">LA PLANIFICATION</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Pour planifier sa solution, l’adulte cherche des pistes et privilégie celles qui semblent les plus efficaces et économiques.
- Il est en mesure, à cette étape, de traduire les contraintes de la situation en langage mathématique.
- Ses actions sont orientées vers les solutions optimales. Par exemple, lorsqu’il cherche le chemin optimal dans un graphe ou un arbre, il surligne de façon intuitive les arêtes qui pourraient représenter ce chemin.
- Il peut avoir recours à une représentation graphique de la situation pour mettre en évidence certaines relations métriques ou trigonométriques</td></tr>
<tr><td>Exemples de stratégies</td><td>• diviser la situation-problème en sous-problèmes (la recherche du chemin optimal implique la décomposition du graphe en cycles et en chaînes);
• rechercher une règle algébrique qui tiendrait compte de la meilleure relation entre les contraintes et les conséquences imposées par la situation-problème : déterminer les paramètres pertinents de la droite baladeuse ou de la fonction économique;
• diviser la situation-problème en sous-problèmes pour déterminer une mesure à partir de relations métriques dans des figures semblables.</td></tr>
<tr><th colspan="2">L’ACTIVATION</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Placé au cœur du traitement d’une situation-problème, l’adulte déduit le pas des axes en analysant les valeurs maximale et minimale que peuvent prendre les variables, dans le but de représenter graphiquement les demi-plans issus des contraintes. Il déduit également certaines valeurs des points d’intersection des droites frontières, par simple substitution.
- Il respecte le sens des symboles, des termes et des notations afin d’éviter toute confusion.
- Il différencie les divers types de figures en vérifiant si les règles et les codes ont été respectés.
- Il tient compte de la proportion dictée et respecte les symboles et les conventions liés au concept en cause.
- Il illustre sa preuve à l’aide d’un schéma ou d’une esquisse afin de faciliter la compréhension du lecteur.</td></tr>
<tr><td>Exemples de stratégies</td><td>• procéder par essais et erreurs pour mathématiser certaines contraintes ou pour repérer les différents chemins du graphe;
• dénombrer l’ensemble des chemins possibles dans un graphe, en vue de choisir la solution optimale;
• construire des tables de valeurs afin d’avoir deux points pour représenter les droites frontières du polygone de contraintes;
• anticiper les figures qui optimisent la situation pour bien comprendre, entre autres, le lien qui existe entre les contraintes qui affectent l’espace et les caractéristiques (aires et volume) d’un objet.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">DÉMARCHE ET STRATÉGIES</th></tr>
<tr><th colspan="2">LA RÉFLEXION</th></tr>
<tr><td colspan="2">– L’adulte adopte une attitude réflexive tout au long du traitement de la situation et se questionne régulièrement sur ses étapes de travail et sur les choix qu’il fait, avec l’intention de valider sa solution.
– Le retour sur les étapes de son travail contribue à l’utilisation rigoureuse du langage mathématique, surtout pour la production d’un message. L’adulte s’assure de la clarté de son message en vérifiant le respect des codes et des conventions.
– Il émet des conjectures sur des cas limites ou particuliers de triangles quelconques afin de valider certains résultats en utilisant le raisonnement.</td></tr>
<tr><td>Exemples de stratégies</td><td>• vérifier la cohérence de sa solution : en comparant le nombre de solutions possibles d’un système d’équations avec le nombre de solutions trouvées; en s’assurant, intuitivement, que les coordonnées des points trouvées sont bien celles des sommets du polygone de contraintes, etc.;
• différencier les stratégies utiles à la programmation linéaire de celles en lien avec la théorie des graphes;
• déterminer les stratégies liées au traitement de situations-problèmes en géométrie (appliquer une règle, se référer à un énoncé de géométrie, utiliser une formule, etc.).</td></tr>
</table>

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Les compétences transversales ne se construisent pas dans l’abstrait : elles prennent racine dans des situations-problèmes et participent, à divers degrés, au développement des compétences disciplinaires, et inversement.

Plusieurs compétences transversales peuvent être monopolisées à divers degrés dans le traitement de situations de la famille *Recherche de solutions optimales*. Le programme d’études en propose deux qui apparaissent les plus pertinentes pour ce cours : *Communiquer de façon appropriée* et *Exercer son jugement critique*.

Compétence de l’ordre de la communication

Les situations-problèmes liées à l’optimisation sont nombreuses, qu’il s’agisse de planifier une étude de marché afin d’anticiper les revenus d’une entreprise, d’optimiser les dépenses liées à la planification d’une production médiatique, de choisir l’emballage le plus économique, etc. L’adulte développe la compétence *Communiquer de façon appropriée* puisqu’elle permet une approche qui se situe au-delà du traitement mathématique. En effet, la communication étant un processus interactif qui exige que l’on s’ajuste à une diversité de significations possibles et d’attentes réciproques, la programmation linéaire ne suffit pas à elle seule à résoudre un problème. De plus, la connaissance des méthodes de production, de construction et de diffusion de produits médiatiques ainsi que l’utilisation de techniques, de technologies et de langages divers dépassent les limites de la mathématique.

Compétence d’ordre intellectuel

Par ailleurs, la compétence transversale *Exercer son jugement critique* peut s’avérer fort pertinente dans une situation d’apprentissage portant sur la planification d’une production médiatique. En effet, le traitement de situations est l’occasion d’initier l’adulte au respect de la propriété intellectuelle, à la défense de la liberté d'expression, au respect de la vie privée et de la réputation d'autrui. Ce type de traitement déborde la mathématisation des contraintes et l'optimisation de la fonction objective. Il pourrait pousser l'adulte à vaincre ses préjugés et à dépasser les évidences intuitives. Dans une situation d'apprentissage portant sur la conception d'un emballage, l'adulte peut être amené à *Exercer son jugement critique* par rapport à l'utilisation parfois abusive d'emballages en marketing. Il prend alors conscience que les choix responsables du consommateur peuvent engendrer des économies d'argent et d'énergie, mais qu'ils peuvent surtout favoriser une meilleure gestion de l'environnement. D'autres situations peuvent aussi amener l'adulte à comprendre les enjeux de l'exploitation de l'espace dans différents domaines, comme la publicité ou les arts, ou dans divers types d'aménagements.

CONTENU DISCIPLINAIRE

Dans ce cours, l'adulte réactive et approfondit un ensemble de savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Ces savoirs sont sollicités pour la prise en compte de contraintes à respecter dans des contextes d'optimisation. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, il complète sa formation en s'appropriant les savoirs propres à ce cours.

Savoirs prescrits

En vue de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées, l'adulte développe trois procédés intégrateurs énoncés comme suit :

- **l'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire;**
- **l'optimisation d'une situation à l'aide de la théorie des graphes;**
- **l'optimisation spatiale dans un contexte de conception ou d'utilisation d'objets tridimensionnels.**

Ces procédés, mis en valeur dans les situations d'apprentissage du présent cours, favorisent l'intégration des savoirs mathématiques et des compétences disciplinaires. Les situations d'apprentissage traitées doivent toucher à l'un ou l'autre de ces procédés intégrateurs. Toutefois, l'ensemble des situations choisies doit être assez vaste pour couvrir les trois procédés.

Savoirs mathématiques	Limites et précisions
Expressions algébriques	
• Résolution d'inéquations du 1er degré à deux variables	
Programmation linéaire	
• Système d'inéquations du premier degré à deux variables	
• Représentation des contraintes et de la fonction à optimiser (fonction objectif ou économique)	La représentation des contraintes peut se faire sous forme algébrique ou graphique. Dans ce cours, l'expression est limitée à la fonction à optimiser par une équation de la forme Ax + By + C = Z et dans laquelle A, B et C sont des nombres rationnels
• Détermination et interprétation des sommets et de la région-solution (fermée ou non)	
• Modification des conditions de la situation pour la rendre plus efficiente	
Graphe	
• Représentation et modélisation d'une situation à l'aide d'un graphe	

<table>
<tr><th>Savoirs mathématiques</th><th>Limites et précisions</th></tr>
<tr><td>Graphe (Suite)
Comparaison de différents graphes</td><td>Les graphes à l’étude dans ce cours, incluant les arbres, sont de type :
simple (sommets et arêtes seulement)
orienté
coloré
valué
connexe
complet
Les différents éléments liés aux graphes à l’étude dans ce cours sont les suivants : sommet, arête, boucle, degré d’un sommet, distance, chaîne, cycle, chaîne simple, cycle simple.</td></tr>
<tr><td>Recherche de chaînes ou de cycles eulériens et hamiltoniens, d’un chemin critique, de la chaîne la plus courte, d’un arbre de valeurs minimales ou maximales ou encore du nombre chromatique</td><td></td></tr>
<tr><td>Recherche de mesures
Figures équivalentes
Détermination de mesures :
de positions
d’angles,
de longueurs (segments, cordes)
d’aires
de volumes</td><td>Ces mesures doivent mettre à profit des figures isométriques, semblables ou équivalentes ainsi que des propriétés des figures et des relations trigonométriques. Les relations métriques peuvent être réinvesties.</td></tr>
<tr><td>Relations dans le triangle</td><td>Les relations trigonométriques à l’étude font appel à la loi des cosinus. Les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle, la loi des sinus et la formule de Héron peuvent être réinvestis.</td></tr>
</table>

Énoncés
L'adulte doit maîtriser les énoncés suivants, qui sont prescrits. Ils peuvent être utilisés dans une preuve ou une démonstration. En voici la liste :
E13. Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.
E14. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
E15. Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $r + 1$, où r est le plus grand degré de ses sommets.
E16. De tous les polygones équivalents à n côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.
E17. De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre)
E18. De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume.
E19. De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume.
E20. De tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.
E21. De tous les solides de même volume, c'est la boule qui a la plus petite aire totale.

Repères culturels

Les décideurs dans une entreprise ou dans un gouvernement doivent, depuis de très nombreuses années déjà, résoudre des problèmes combinatoires, aléatoires ou concurrentiels. C'est pourquoi de nombreux mathématiciens se sont penchés sur la question.

Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse qui a été un pionnier des mathématiques pures et appliquées, est considéré comme l'auteur du premier théorème découlant de la théorie des graphes. La programmation linéaire, une branche de l'optimisation très utilisée pour accompagner la prise de décisions, trouve sa source dans les travaux sur les systèmes d'inégalités du mathématicien français Joseph Fourrier (1768-1830), même si la paternité de ces systèmes est attribuée au mathématicien états-unien Georges Dantzig (1914-2005). Alors qu'il était dans l'armée de l'air américaine, durant la Seconde Guerre mondiale, Dantzig a mis au point une technique pour régler, au moindre coût, le problème de distribution de l'armée. Cette technique, qui allie puissance et souplesse, a été rapidement récupérée, tant par le monde des affaires que par celui de l'industrie. Le premier a exploité ce potentiel pour résoudre des problèmes économiques importants tandis que le second l'a mis au service de la gestion de la production.

Depuis les années 1970, on trouve des applications de la programmation linéaire dans des domaines nombreux et variés comme la santé, l'environnement, l'agriculture, les communications, l'industrie pétrolière, la chimie, l'informatique, l'énergie, le transport, la production industrielle et les finances. Cette percée est le fruit de l'évolution de la technologie informatique qui a mené au traitement de situations exigeant des quantités astronomiques de calculs. Les exemples donnés dans le cadre du cours permettront à l'adulte de prendre conscience de l'importance de la programmation linéaire.

La théorie des graphes représente un autre outil qui a servi à améliorer la rentabilité des compagnies de transport de marchandises ou de personnes. Lors d'un projet, l'adulte intéressé à approfondir ses connaissances sur l'utilisation de cette théorie pourrait se renseigner auprès d'une ou de plusieurs compagnies de transport qui ont recours aux graphes pour comprendre l'économie de temps et d'argent dans la détermination des itinéraires.

Depuis la préhistoire, l'homme a recours à des techniques d'emballage pour préserver et transporter ses denrées. D'abord constitués de peaux d'animaux, de feuilles et de coquillages, les emballages ont ensuite été fabriqués : amphores, jarres, paniers, récipients en verre et en métal. Avec la révolution industrielle (fin du XIX^{e} siècle et début du XX^{e} siècle), les contenants jetables ont fait font leur apparition. Les emballages ont acquis des fonctions supplémentaires : ils doivent faciliter l'entreposage et informer le consommateur. Les concepteurs d'emballages doivent répondre aux exigences de l'industrie à moindre coût. Ils ont recours à la recherche de mesures pour résoudre les différents problèmes d'optimisation qui leur sont soumis.

FAMILLE DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

La famille *Recherche de solutions optimales* regroupe les situations qui comportent un problème devant être en partie traité par l'optimisation, à l'aide de la programmation linéaire, de la théorie des graphes ou de la recherche de mesures. Le cours *Optimisation en contexte général* fournit à l'adulte l'occasion de poser des actions en vue de le rendre apte à maximiser un profit, un procédé, un nombre d'objets ou de personnes, un espace ou encore à minimiser des coûts ou des pertes.

En traitant les situations-problèmes proposées dans ce cours, l'adulte est amené, entre autres, à faire la liste des savoirs mathématiques en matière de théorie des graphes, dans le cas d'un problème lié à la recherche du chemin optimal, à surligner de façon intuitive les arêtes qui pourraient représenter ce chemin lorsqu'il cherche le chemin optimal dans un graphe ou un arbre, ou encore à revenir sur l'énoncé du problème de départ afin de vérifier si la solution cherchée est en étroite corrélation avec les sommets ou la frontière du polygone de contraintes. Dans un contexte géométrique, il doit différencier les divers types de figures en vérifiant si les règles et les codes mathématiques ont été respectés.

DOMAINES GÉNÉRAUX DE FORMATION

Les domaines généraux de formation couvrent les grands enjeux contemporains. Idéalement, le choix des situations à traiter doit être fait dans le respect des intentions éducatives des différents domaines généraux de formation puisque ces domaines représentent des toiles de fond sur lesquelles se greffent les situations-problèmes servant ainsi à donner du sens aux apprentissages de l’adulte. Deux de ces domaines sont particulièrement appropriés à ce cours : *Médias* et *Environnement et consommation*.

Médias

Dans le but d’amorcer une prise de conscience de l’adulte et de l’amener à faire preuve de sens critique, éthique et esthétique par rapport aux médias, certaines situations d’apprentissage proposées peuvent lui offrir la chance de se poser des questions sur la contribution des médias à la mise en marché d’un produit. L’adulte peut, par exemple, chercher à optimiser un investissement dans une production publicitaire tout en respectant les contraintes du problème. La mathématisation de ces contraintes implique la prise en considération du sexe, de l’âge, du revenu, de la clientèle visée, etc. L’adulte peut aussi utiliser les graphes pour planifier la mise en marché du produit. Ce type de situation répond à l’intention éducative du domaine général de formation *Médias*.

Environnement et consommation

Parmi les situations d’apprentissage proposées à l’adulte dans le présent cours, certaines pourraient l’amener à s’interroger sur l’utilisation du plastique dans les produits d’emballage. Par exemple, il pourrait comparer la quantité d’emballages utilisés en fonction de leur volume, le produit étant présenté en format individuel ou en format familial. Il pourrait même envisager d’étudier une plus large population. De plus, l’adulte pourrait vérifier s’il existe un lien entre le type de format utilisé, l’espace que les contenants occupent dans les présentoirs réfrigérés et le coût du transport. Cet exercice vise une prise de conscience de l’impact des choix quotidiens en matière de consommation et le maintien d’un rapport plus dynamique avec le milieu. Il permet aussi d’établir une distance critique par rapport à la consommation et à l’exploitation de l’environnement, ce qui est en relation directe avec l’intention éducative du domaine général de formation *Environnement et consommation*. Dans d’autres situations, l’adulte pourrait avoir à organiser l’horaire de livraison d’une compagnie. Ce faisant, il pourrait évaluer le coût de l’essence en fonction de différents itinéraires en s’appuyant sur la théorie des graphes et ainsi constater les économies possibles et les avantages sur le plan de l’environnement.

Exemple de situation d'apprentissage

Toutes les situations d'apprentissage ou situations-problèmes, peu importe le domaine général de formation retenu, placent l'adulte au cœur de l'action. Elles favorisent le développement des compétences disciplinaires et transversales visées, l'acquisition de notions et de concepts mathématiques de même que la mobilisation de ressources diverses utiles à la réalisation de la tâche.

Le tableau qui suit présente les éléments nécessaires à l'élaboration de toute situation d'apprentissage ou situation-problème. On y précise ceux retenus dans l'énoncé de situation-problème décrit à la page suivante.

ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES À L'ÉLABORATION D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE, D'UNE SITUATION-PROBLÈME	
Domaine général de formation (ciblé) – Permet de contextualiser les apprentissages, de leur donner du sens.	• Médias
Compétences disciplinaires (prescrites) – Se développent dans l'action. Nécessitent la participation active de l'adulte.	• Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes • Déployer un raisonnement mathématique • Communiquer à l'aide du langage mathématique
Famille de situations d'apprentissage (prescrite) – Regroupe des situations appropriées au cours à partir de problématiques tirées de la réalité. – Permet, entre autres, l'acquisition de connaissances mathématiques.	• Recherche de solutions optimales
Compétences transversales (ciblées) – Se développent en contexte en même temps que les compétences disciplinaires.	• Communiquer de façon appropriée • Exercer son jugement critique
Savoirs essentiels (prescrits) – Sont des connaissances, des concepts, des notions mathématiques à acquérir.	• Voir la liste

Cette rubrique propose, en fait, un exemple d'énoncé de situation-problème accompagné d'exemples d'actions associées au traitement mathématique. Cet énoncé est constitué d'un contexte qui sert de fil conducteur, mais les activités d'apprentissage incluses n'y sont pas détaillées de façon formelle. L'accent est plutôt mis sur un exemple de traitement mathématique pertinent, qui respecte les quatre phases de la résolution : la représentation, la planification, l'activation et la réflexion. Toutefois, même si ce n'est pas explicite, on peut discerner les éléments qui composent cet énoncé, éléments identifiés dans le précédent tableau, soit : le domaine général de formation, les compétences disciplinaires, la famille de situations, les compétences transversales et les savoirs essentiels. Pour favoriser l'apprentissage, ces différents éléments doivent former un tout cohérent et signifiant pour l'adulte.

L'enseignante ou enseignant peut se servir de chacun des éléments comme autant d'objets de formation. Ces objets peuvent être des actions associées à chacune des phases de résolution, des actions relatives aux compétences disciplinaires ou transversales ou encore aux savoirs prescrits. L'enseignante ou enseignant a la possibilité d'utiliser l'exemple de traitement mathématique fourni pour construire d'autres tâches complexes ou d'autres activités d'apprentissage liées aux connaissances mathématiques que l'adulte doit acquérir.

<table>
<tr><th>Énoncé de situation-problème</th><th colspan="2">Exemples d'actions associées au traitement mathématique
d'une situation-problème appartenant à la famille

Recherche de solutions optimales</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Une entreprise souhaite lancer un nouveau produit. Le directeur du marketing doit prévoir un budget pour la production médiatique. La première étape de cette production porte sur la conception du plan. Le directeur souhaite bien sûr la meilleure production médiatique au moindre coût.

Le médium le plus approprié ayant été retenu, on demande à l'adulte de déterminer, parmi les quatre soumissionnaires, celui qui propose le plan publicitaire le moins coûteux.</td><td colspan="2">Procédé intégrateur : Optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire
Au cours de l'une ou l'autre des phases de résolution, l'adulte pourrait accomplir certaines actions comme :</td></tr>
<tr><td>Représentation</td><td>• Déterminer les éléments importants à retenir : le nombre de jours réservés pour chaque étape (conception et production) et le coût associé à chacune;
• Préciser les obstacles à surmonter afin de mettre son plan en œuvre.</td></tr>
<tr><td>Planification</td><td>• Se référer à la solution d'une situation-problème analogue pour concrétiser son plan;
• Déterminer les savoirs mathématiques nécessaires au traitement de la situation : identification des variables, détermination des contraintes, établissement d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Énoncé de situation-problème</th><th colspan="2">Exemples d’actions associées au traitement mathématique d’une situation-problème appartenant à la famille
Recherche de solutions optimales</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Pour optimiser le plan publicitaire, l’adulte doit d’abord analyser les projets des quatre soumissionnaires et représenter graphiquement les contraintes rattachées à leur plan respectif (ex. : le nombre minimum d’employés nécessaires et leur salaire horaire; les limites de coût pour les matériaux; ou encore le coût de la conception du projet).</td><td>Activation</td><td>• Mathématiser les contraintes (par exemple les prix établis par chaque fournisseur) à l’aide d’inéquations;
• Représenter la situation par un polygone de contraintes pour ensuite optimiser les dépenses;
• Déterminer le sommet du polygone de contraintes qui représente le moindre coût;
• Calculer le coût associé à ce sommet.</td></tr>
<tr><td>Réflexion</td><td>• Comparer sa solution et ses résultats à ceux d’autres personnes, dans le but de faire ressortir les forces et les faiblesses du ou des modèles construits, etc.;
• S’interroger sur le nombre de fournisseurs nécessaires pour assurer la fiabilité et le réalisme du modèle;
• S’assurer du réalisme de la solution proposée;
• Chercher en quoi la modification d’une contrainte affecterait le choix du meilleur soumissionnaire (par exemple, une hausse du salaire minimum entraînerait-elle une modification de la solution optimale?);
• Préciser la modification à apporter aux demandes d’une compagnie pour qu’elle obtienne le contrat.</td></tr>
</table>

ATTENTES DE FIN DE COURS

Pour résoudre les situations-problèmes de la famille *Recherche de solutions optimales*, l'adulte optimise une situation à l'aide de la programmation linéaire ou à l'aide de la théorie des graphes, ou procède à une optimisation dans un contexte de conception ou d'utilisation d'objets tridimensionnels. Pour ce faire, il met en œuvre les trois compétences disciplinaires du programme, soit : *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes*, *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

Lorsque l'adulte utilise la programmation linéaire pour résoudre une situation-problème liée à l'optimisation, il décode les éléments du langage qui se prêtent à un traitement mathématique; il construit à l'aide des symboles et des règles mathématiques les contraintes de la situation sous forme de système d'inéquations; il représente graphiquement ces dernières afin d'illustrer le polygone de contraintes; et il détermine les coordonnées des sommets. L'adulte évalue, par la suite, toutes les solutions possibles à l'aide de la droite baladeuse et distingue les solutions continues des solutions discrètes. Enfin, il prend le temps de valider sa solution en fonction du contexte et discrimine les sommets qui appartiennent à des inéquations ou qui les limitent. Lorsqu'il est confronté à une conjecture, il compare, évalue, critique des choix ou des démarches et établit des preuves, le cas échéant. Après s'être positionné, il choisit une démarche de solution qu'il considère optimale. Il justifie toutes les étapes de sa démarche (solution et résultat) et détermine soit une solution optimale, soit les raisons qui entraînent le rejet d'une conjecture. De plus, il explique les effets possibles qu'entraîne la modification de certaines contraintes et généralise, au besoin, des situations.

L'utilisation de la théorie des graphes pour résoudre des situations-problèmes liées à l'optimisation lui permet de se représenter clairement la situation à l'aide d'un graphe, d'identifier les sommets et les arêtes qui correspondent au contexte et de juger s'il faut attribuer une valeur aux arêtes et les orientées. Il dénombre les chemins possibles et sélectionne le chemin critique en analysant et en comparant sa solution au contexte de la situation-problème. De plus, lorsqu'il démontre des énoncés liés aux graphes, il met à profit les trois théorèmes appris afin de déduire ou d'induire des résultats.

L'adulte qui explore des situations-problèmes en lien avec une optimisation spatiale dans un contexte de conception ou d'utilisation d'objets tridimensionnels compare des figures équivalentes et détermine celles qui respectent le mieux certaines conditions (maximiser ou minimiser l'espace). Il établit des liens entre les aires totales et les volumes des solides. Il a recours à différentes stratégies en vue de résoudre algébriquement la situation-problème en mettant à profit les savoirs mathématiques liés aux fonctions. Il mobilise les savoirs géométriques appropriés pour concevoir et construire des plans et des objets. Il détermine différentes mesures à l'aide de définitions, de propriétés, de formules ou d'énoncés admis dans le cas de triangles quelconques, de figures planes ou de solides isométriques, semblables ou équivalents. De plus, pour produite et valider sa solution, il justifie rigoureusement les différentes étapes de son travail, ces dernières étant accompagnées d'éléments de preuve formelle.

Tout au long de sa résolution de situations-problèmes, l’adulte utilise ses connaissances en lien avec les savoirs mathématiques : programmation linéaire, graphe et recherche de mesures. Il emploie correctement les symboles, les termes et les notations liés à ces savoirs. En outre, il valide toujours auprès de différentes sources les lois, les théorèmes, les corolaires ou les lemmes qu’il a déduits ou induits afin de bonifier sa bibliothèque mathématique personnelle. Enfin, il n’hésite pas à demander de l’aide lorsqu’une difficulté se présente.

CRITÈRES D’ÉVALUATION DES COMPÉTENCES VISÉES PAR LE COURS

Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes

- *Manifestation, oralement ou par écrit, d’une compréhension adéquate de la situation-problème*
- *Mobilisation de stratégies et de savoirs mathématiques appropriés à la situation-problème*
- *Élaboration d’une solution* appropriée à la situation-problème*
- *Validation appropriée des étapes** de la solution élaborée*

* La solution comprend une démarche, des stratégies et un résultat.
** Le modèle mathématique, les opérations, les propriétés ou relations.

Déployer un raisonnement mathématique

- *Formulation d’une conjecture appropriée à la situation*
- *Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés*
- *Mise en œuvre convenable d’un raisonnement mathématique adapté à la situation*
- *Structuration adéquate des étapes d’une démarche pertinente*
- *Justification congruente des étapes d’une démarche pertinente*

Communiquer à l’aide du langage mathématique

- *Interprétation juste d’un message à caractère mathématique*
- *Production d’un message conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et en fonction du contexte*